2. Circuite pentru transformãri liniare

Dacã se aplicã un semnal sinusoidal la intrarea unui **circuit liniar**, rãspunsul va avea tot o formã sinusoidalã. Dacã semnalul care se aplicã este nesinusoidal, atunci la trecerea prin circuit acesta suferã “transformãri liniare” – rãspunsul nu mai “seamãnã” cu semnalul aplicat la intrare. Din categoria acestor circuite în cazul circuitelor logice pot fi întîlnite :

- circuite cu elemente pasive R, L, C.
- transformatoare de impulsuri.
- linii de întîrziere.

În continuare se vor analiza circuitele RC trece sus şi trece jos.

2.1. Circuite RC trece-sus

Schema electricã a unui circuit RC trece-sus este prezentatã în fig.2.1.

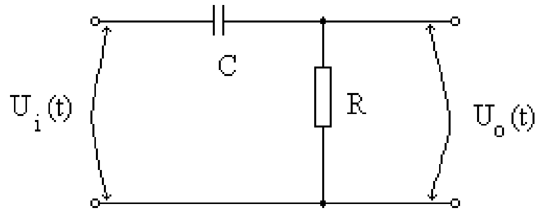


Fig.2.1. Circuit RC trece-sus

2.1.1. Rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal sinusoidal

Fie semnalul sinusoidal de intrare scris sub formã complexã $U_i(t) = |U_i| e^{j\omega t}$. Rãspunsul va fi de forma $U_o(t) = |U_o| e^{j(\omega t+\varphi)}$. Funcția de transfer a circuitului are expresia :

$$K(j\omega)=\frac{U_o}{U_i}=\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+\frac{1}{j\omega RC}}=\frac{|U_o|}{|U_i|}\cdot e^{j\varphi}=A(\omega)\cdot e^{j\varphi} \qquad (2.1)$$

unde prin $A(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ s-au notat atenuarea , respectiv defazajul introdus de circuit. Pe baza relației (2.1) se calculeazã $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)^2}}$ şi $\varphi(\omega)=arctg\left(\dfrac{1}{\omega RC}\right)$

Fãcând notația $f_1=\dfrac{1}{2\pi RC}$ se poate calcula :

$$A(f)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f_1}{f}\right)^2}} \qquad \text{şi} \qquad \varphi(f)=arctg\left(\frac{f_1}{f}\right)$$

f_1 poartã numele de frecvențã de tãiere . Atenuarea A(f) reprezentatã în coordonate logaritmice se prezintã ca în fig.2.2. şi justificã denumirea circuitului de filtru trece-sus : pentru frecvențe $f>>f_1$ semnalele trec practic neatenuate (atenuare 0 dB) iar pentru frecvențe $f<<f_1$ semnalele sunt puternic atenuate, panta caracteristicii fiind de circa
20 dB/decadã

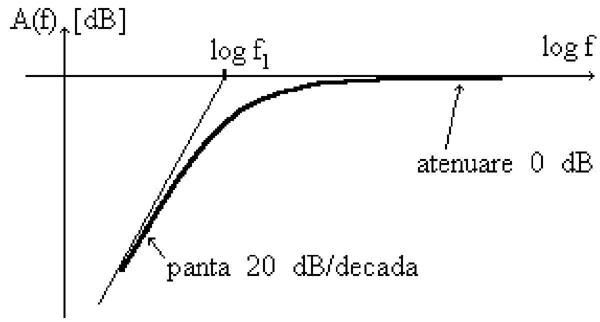


Fig. 2.2. Caracteristica atenuãrii A(f) în coordonate logaritmice

2.1.2. Rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal treaptã

Fie semnalul de intrare un semnal treaptã de amplitudine E aplicat în momentu $t = 0$, fig.2.3.a.- linie întreruptã.

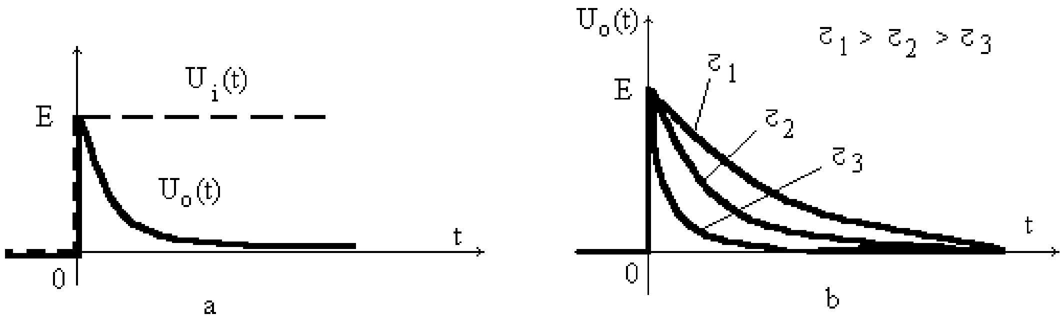


Fig.2.3. Rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal treaptã de intrare

Deosebim intervalele :

$t < 0$

Deoarece $U_i(t) = 0$ încã de la $t = -\infty$ rezultã $U_o(t) = 0$. În particular se observã cã tensiunea pe condensator în momentul $t = 0^-$ este $U_C(0^-)=0$

$t > 0$

În determinarea rãspunsului pe acest interval, fiind îndeplinite condițiile de aplicare ale relației (1.3), vom aplica direct aceastã relație. Valorile pentru $U_0(0)$ şi $U_o(\infty)$ se determinã astfel:

- **pentru determinarea valorii $U_o(0)$** se aplicã teorema Kirchoff circuitului RC trece-sus **în momentul $t = 0^+$** , fig. 2.4. Deoarece tensiunea pe condensator nu se poate modifica instantaneu, rezultã cã $U_C(0^-) = 0 = U_C(0^+)$ şi în consecințã tensiunea de ieşire în momentul $t = 0^+$ este egalã cu tensiunea de intrare în acelaşi moment, adicã $\mathbf{U_o(0^+) = E}$.

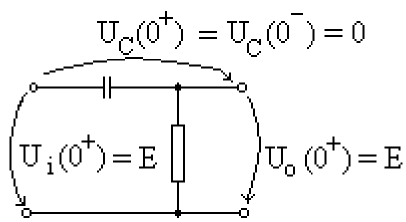
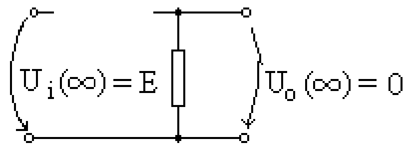


Fig. 2.4

Observație :deoarece tensiunea la bornele unei capacitãți nu poate varia instantaneu se constatã cã un semnal treaptã aplicat pe una din armãturile sale se transmite identic ca amplitudine şi sens pe cealaltã armãturã a sa. De aceea se spune cã o capacitate este "*scurtcircuit pentru semnale de tip treaptã*".



- **pentru determinarea valorii $U_o(\infty)$** se ține cont de faptul cã la aplicarea unei tensiuni constante, o capacitate se încarcã la tensiunea care i se aplicã dupã care curentul prin capacitate se anuleazã – ca urmare la t = ∞ capacitatea se comportã **ca un circuit întrerupt** ! Reconsiderând circuitul şi îndepãrtând capacitatea – fig.2.5. – se obține imediat **$U_o(\infty) = 0$** ..

Fig. 2.5.

În concluzie rãspunsul se va calcula astfel

$$\left.\begin{array}{c} U_o(0^+)=E \\ U_o(\infty)=0 \\ \tau=RC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad U_o(t)=U_o(\infty)+\left(U_o(0^+)-U_o(\infty)\right)\cdot e^{-\frac{t}{RC}}=E\cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2.2)$$

Reunind cele douã intervale, rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal treaptã este:

$$U_o(t)=\begin{cases} 0 & pentru \quad t<0 \\ E\cdot e^{-\frac{t}{RC}} & pentru \quad t>0 \end{cases} \quad (2.3)$$

În figura 2.3.a - linie continuã - s-a reprezentat rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal treaptã iar în fig.2.3.b s-au considerat mai multe valori pentru constanta de timp RC.
Rãspunsul indicial al circuitului se determinã particularizând (2.2) pentru E = 1 şi este deci $h(t)=e^{-\frac{t}{RC}}$.

2.1.3. Rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal rampã

Fie semnalul de intrare un semnal rampã de pantã k aplicat în momentu t = 0 adicã de forma $U_i(t) = kt$. Şi în acest caz deosebim intervalele :

- **intervalul t ∈ (- ∞ , 0)**:

Pe acest interval $U_o(t) = 0$

- **intervalul t ∈ (0 ,+ ∞ ,)**:

În determinarea rãspunsului pe acest interval se va aplica integrala Duhamel. În acest scop se calculeazã $U_i(0)=0$ şi $\frac{dU_i(t)}{dt}=k$, de unde :

$$U_o(t)=U_i(0)\cdot h(t)+\int_0^t\left(\frac{dU_i(t)}{dt}\right)_{t=t-\theta}\cdot h(\theta)\cdot d\theta=\int_0^t k\cdot e^{-\frac{\theta}{RC}}d\theta=kRC\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (2.4)$$

În concluzie : $U_o(t)=\begin{cases} 0 & pentru \quad t<0 \\ kRC\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) & pentru \quad t>0 \end{cases}$

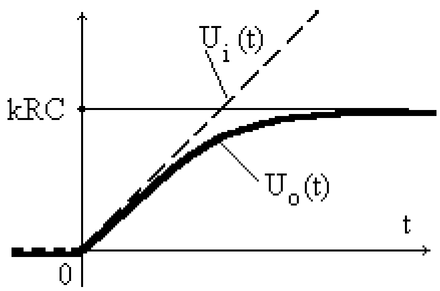


Fig. 2.6. Rãspunsul la semnal rampã

Semnalul de intrare şi rãspunsul circuitului sunt reprezentate în fig. 2.6. Se poate verifica imediat faptul cã rãspunsul este tangent la semnal în origine, adicã $\left.\frac{dU_o(t)}{dt}\right|_{t=0} = k$

2.1.4. Rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal exponențial

Fie semnalul de intrare un semnal exponențial de amplitudine E şi constantã de timp τ aplicat în momentu t = 0, adicã de forma $U_i(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Deosebim intervalele :

- **intervalul t ∈ (- ∞ , 0)**:

Pe acest interval $U_o(t) = 0$

- **intervalul t ∈ (0 ,+ ∞ ,)**:

În determinarea rãspunsului se va aplica integrala Duhamel. În acest scop se calculeazã $U_i(0) = 0$ şi apoi $\frac{dU_i(t)}{dt} = \frac{E}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, de unde :

$$U_o(t) = U_i(0) \cdot h(t) + \int_0^t \left(\frac{dU_i(t)}{dt}\right)_{t=t-\theta} \cdot h(\theta) \cdot d\theta = \int_0^t \frac{E}{\tau} \cdot e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} \cdot e^{-\frac{\theta}{RC}} d\theta =$$
$$= \frac{E}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \int_0^t e^{\theta\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC}\right)} \cdot d\theta \qquad (2.5)$$

Discuție :

Cazul τ = RC În acest caz relația de mai sus devine

$$U_o(t) = \frac{E}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \int_0^t d\theta = \frac{E}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot t \qquad (2.6)$$

Cazul τ ≠ RC În acest caz relația (2.5) devine

$$U_o(t)=\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\int_0^t e^{\theta\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{RC}\right)}\cdot d\theta=\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{RC}}\cdot\left(e^{t\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{RC}\right)}-1\right)=$$
$$=\frac{E}{1-\frac{\tau}{RC}}\cdot\left(e^{-\frac{t}{RC}}-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (2.7)$$

În concluzie : $U_o(t)=\begin{cases}0 & pentru \quad t<0\\ rel.(2.6) \quad sau \quad rel.(2.7) & pentru \quad t>0\end{cases}$

În fig.2.7 s-au reprezentat semnalul exponențial de intrare cu linie întreruptã şi rãspunsul circuitului (cu linie continuã) pentru mai multe valori ale constantei de timp a circuitului comparativ cu constanta de timp a semnalului.

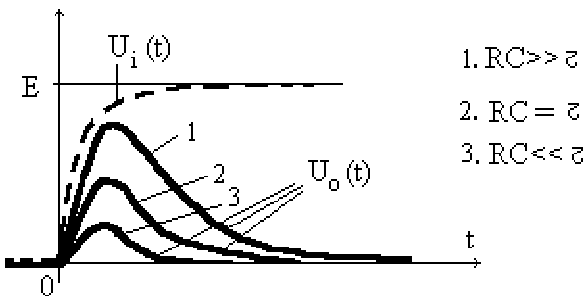
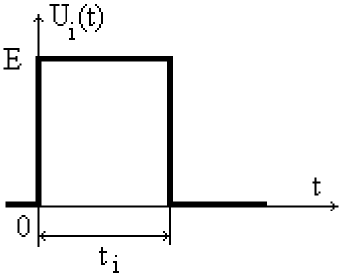


Fig. 2.7. Semnalul exponențial şi rãspunsul circuitului RC trece-sus la acest semnal

Observație : Dacã se considerã RC>>τ atunci în relația (2.7) se pot face neglijãrile

$\frac{\tau}{RC}<<1$ şi $e^{-\frac{t}{RC}}>>e^{-\frac{t}{\tau}}$ de unde se observã cã relația (2.7) degenereazã în relația (2.2). *Cu alte cuvinte, dacã semnalul exponențial are o constantã de timp foarte micã , atunci el poate fi foarte bine asimilat ca un semnal treaptã de aceeaşi amplitudine* (care este mai simplu de analizat).

2.1.5. Rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal impuls



Fie semnalul de intrare de forma unui impuls de amplitudine E şi duratã t_i aplicat în momentul t = 0 - fig. 2.8. Rãspunsul circuitului RC trece-sus la acest semnal va fi determinat prin douã metode.

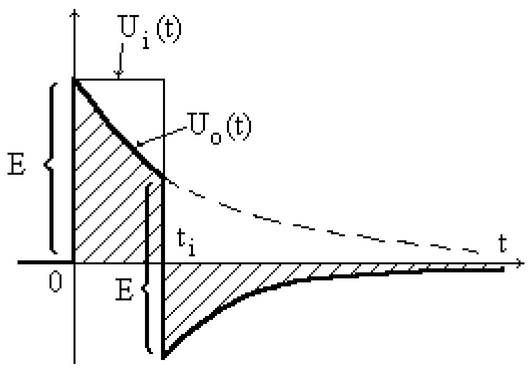
Metoda 1

Se considerã semnalul impuls ca fiind suma a douã semnale treaptã , unul de amplitudine +E şi unul de amplitudine -E. Vom determina rãspunsul pentru fiecare semnal de intrare în parte utilizând relația (2.3).

$$U_{i1} = \begin{cases} 0 & pt. \quad t < 0 \\ E & pt \quad t > 0 \end{cases} \quad \text{de unde} \quad U_{o1}(t) = \begin{cases} 0 & pentru \quad t < 0 \\ E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} & pentru \quad t > 0 \end{cases}$$

$$U_{i2} = \begin{cases} 0 & pt. \quad t < t_i \\ -E & pt \quad t > t_i \end{cases} \quad \text{şi de aici} \quad U_{o2}(t) = \begin{cases} 0 & pt. \quad t < t_i \\ -E \cdot e^{-\frac{t-t_i}{RC}} & pt \quad t > t_i \end{cases}$$

Sumând cele două rãspunsuri se determinã rãspunsul circuitului la semnal impuls, reprezentarea sa graficã fiind prezentatã în fig.2.8



$$U_o(t) = \begin{cases} 0 & pt. \quad t < 0 \\ E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} & pt. \quad 0 < t < t_i \\ E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - E \cdot e^{-\frac{t-t_i}{RC}} & pt. \quad t > t_i \end{cases}$$

Se poate verifica cu uşurinţã faptul cã suprafaţa haşuratã plasatã deasupra abscisei este egalã cu suprafaţa haşuratã aflatã sub abscisã.

Fig. 2.8. Rãspuns la semnal impuls

Metoda 2

Se calculeazã rãspunsul pe fiecare interval de timp în parte cu relația (1.3) :

- **intervalul t<0**

Se observã imediat cã pe acest interval $U_o(t) = 0$

- **intervalul $0 < t < t_I$**

$$\left.\begin{aligned} U_o(0^+) &= E \\ U_o(\infty) &= 0 \\ \tau &= RC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad U_o(t) = U_o(\infty) + \left(U_o(0^+) - U_o(\infty)\right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Pentru momentul imediat anterior sfârşitului de interval se calculeazã $U_o\left(t_i^-\right) = E \cdot e^{-\frac{t_i}{RC}}$

- **intervalul $t > t_i$**

Pe acest interval considerãm timpul t' având originea t' = 0 în momentul de început al inervalului. În legãturã cu acest timp putem calcula :

$$\left.\begin{aligned} U_o(0^+) &= E \cdot e^{-\frac{t_i}{RC}} - E \\ U_o(\infty) &= 0 \\ \tau &= RC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad U_o(t') = \left(E \cdot e^{-\frac{t_i}{RC}} - E \right) \cdot e^{-\frac{t'}{RC}}$$

Se poate reveni la timpul t fãcând schimbarea de variabilã evidentã $t' = t - t_i$ şi de aici

$$U_o(t) = \left(E \cdot e^{-\frac{t_i}{RC}} - E \right) \cdot e^{-\frac{t - t_i}{RC}}$$

Reunind toate cele trei intervale, rãspunsul complet devine

$$U_o(t) = \begin{cases} 0 & pentru \quad t < 0 \\ E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} & pentru \quad 0 < t < t_i \\ \left(E \cdot e^{-\frac{t_i}{RC}} - E \right) \cdot e^{-\frac{t - t_i}{RC}} & pentru \quad t > t_i \end{cases} \tag{2.8}$$

Se poate verifica imediat cã cele douã metode conduc la acelaşi rezultat.

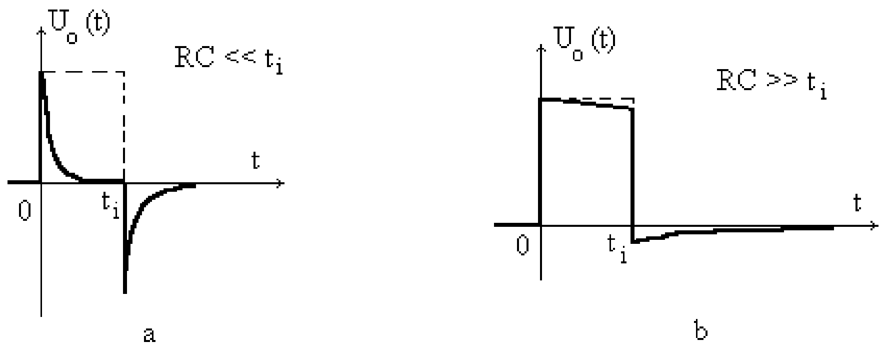


Fig.2.9. Rãspunsul circuitului RC trece-sus la impuls în douã situaţii distincte:

a. cazul în care constanta de timp a circuitului RC este $RC << t_i$
b. cazul în care constanta de timp a circuitului RC este $RC >> t_i$

Pentru cele douã reprezentãri din fig.2.9 se pot face urmãtoarele observaţii:

RC << t_i Rãspunsul diferã puternic faţã de semnal şi se prezintã practic sub forma a douã impulsuri înguste, unul de amplitudine +E şi celãlalt de amplitudine –E.

RC >> t_i Rãspunsul seamãnã destul de bine cu semnalul exceptând uşoara denivelare a palierului superior şi depãşirea sub abscisã.

2.1.6. Rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal rectangular periodic

Fie un semnal rectangular periodic de amplitudine E , perioadã T şi durate T_1 respectiv T_2 precum cel figurat în fig.2.10. Rãspunsul circuitului în regim permanent periodic este determinat ţinând cont de urmãtoarele observaţii :

- rãspunsul are componentã continuã nulã (suprafaţa haşuratã aflatã deasupra abscisei este egalã cu cea aflatã sub abscisã)
- variaţiile instantanee de la intra se transmit identic ca sens şi amplitudine la ieşire
- atât timp cât semnalul de la intrare are valoare constantã , rãspunsul tinde exponenţial cãtre valoarea de infinit 0.

Evident cã la aplicarea primelor impulsuri, se stabileşte un regim tranzitoriu care însã dupã circa (3-5) constante de timp RC atinge practic regimul permanent periodic descris conform principiilor de mai sus.

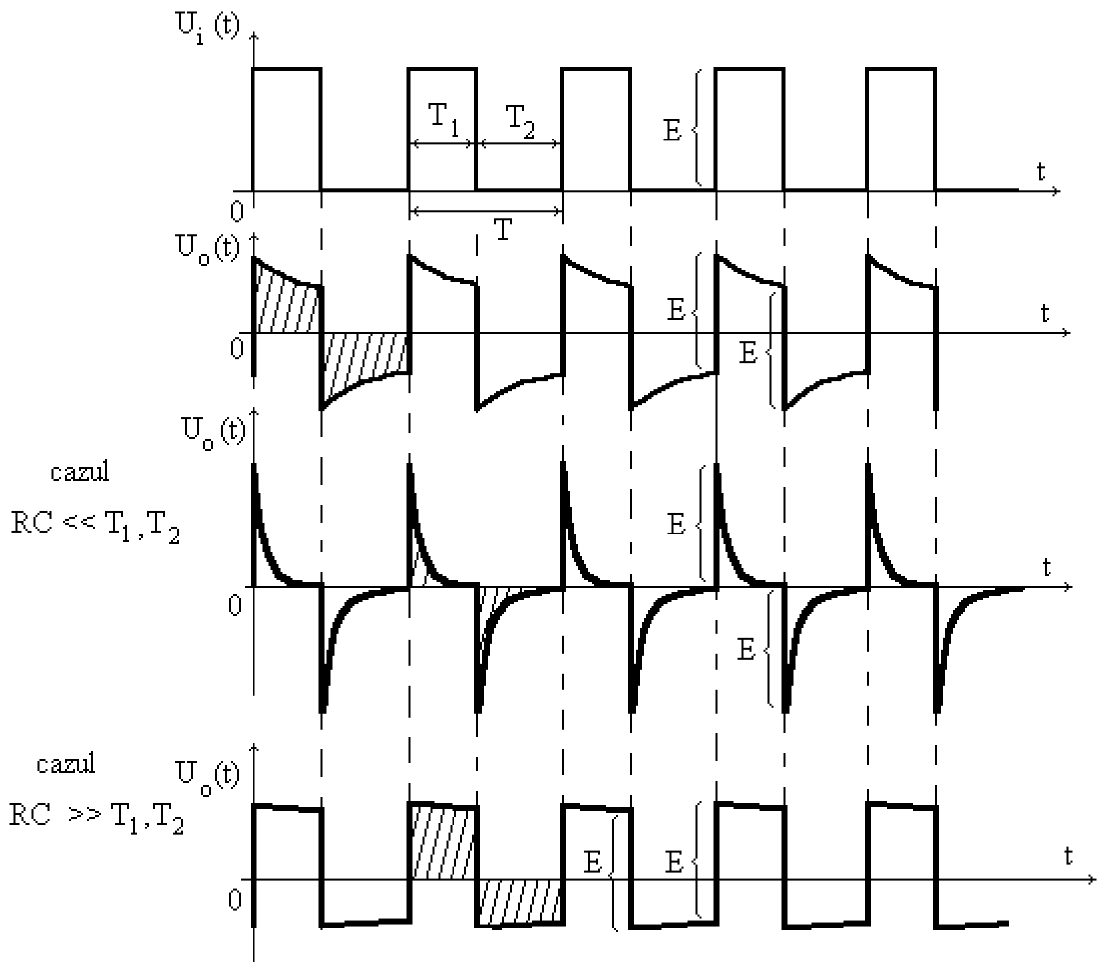


Fig.2.10. Rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal rectangular periodic

Pentru situațiile particulare privind vaaloarea constantei de timp , RC, a circuitului, în fig. 2.10. s-au prezentat douã situații limitã :

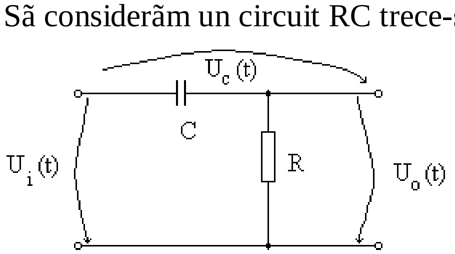
-cazul RC << T_1, T_2 : rãspunsul se prezintã sub forma unor impulsuri înguste de amplitudine + E şi apoi – E . În această situație se spune cã circuitul RC trece sus acționeazã ca un *circuit de derivare* rãspunsul aducând ca formã cu derivata semnalului de intrare.

-cazul RC >> T_1, T_2 : rãspunsul seamãnã foarte bine cu semnalul de intrare excepție fãcând uşoara denivelare a palierelor constante precum şi fatul cã rãspunsul nu are componentã continuã. În această situație se spune cã circuitul RC trece-sus acționeazã ca un *circuit de separare în curent continuu.*

Pentru determinarea expresiilor analitice care descriu rãspunsul circuitului vezi laborator şi culegerea de probleme.

2.1.7. Circuitul RC trece-sus privit ca circuit de derivare

Sã considerãm un circuit RC trece-sus la intrarea cãruia se aplicã un semnal sinusoidal ca



în figura alãturatã. Dacã $\frac{1}{\omega C} >> R$ atunci $U_c >> U_R$ şi se poate scrie cã $U_i(t)=U_c(t)+U_R(t)\approx U_c(t)$

Dar cele douã elemente fiind înseriate înseamnã cã sunt parcurse de acelaşi curent $i_c(t)=i_R(t)$de unde rezultã următoarea relație:

$$U_o(t)=R\cdot i_R(t)=RC\cdot\frac{dU_c(t)}{dt}\approx RC\cdot\frac{dU_i(t)}{dt}$$

Cu alte cuvinte , în condițiile $\frac{1}{\omega C}>>R$ tensiunea de ieşire este proporționalã cu derivata tensiunii de intrare. Revãzând rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal sinusoidal se constatã cã defazajul între semnalul de intrare şi cel de ieşire este $\varphi(\omega)=arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$. O derivare corectã ar presupune φ = 90^o adicã $\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\to\infty$. Practic se constatã cã pentru $\left(\frac{1}{\omega RC}\right)=10$ se obține un defazaj φ ≈ 84^o ceea ce poate fi acceptabil în unele cazuri.

În cazul unui semnal de intrare periodic, oarecare, este necesar ca componenta de frecvență maximã din spectrul semnalului sã îndeplinească condiția $\frac{1}{\omega_{\max}C}>>R$ şi atunci rãspunsul este practic proporțional cu derivata semnalului de intrare.
În fine , în cazul semnalelor dreptunghiulare , prin derivarea semnalului se înțelege obținerea unor impulsuri înguste de amplitudine +E şi –E. Aceastã situație se realizeazã impunând condiția RC << T_1, T_2 condiție care se observã cã este asemãnãroare cu cea impusã mai sus pentru semnal sinusoidal.

2.2. Circuite RC trece-jos

Schema electricã a unui circuit RC trece-jos este prezentatã în fig.2.12.

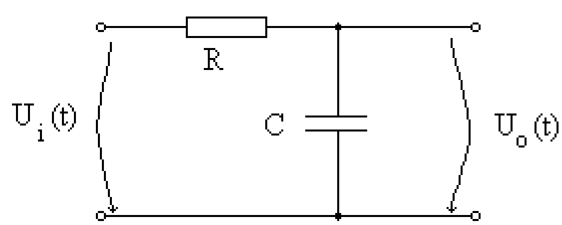


Fig. 2.12. Circuit RC trece-jos

2.2.1. Rãspunsul circuitului RC trece-jos la semnal sinusoidal

Fie semnalul de intrare sinusoidal scris sub formã complexã $U_i(t)=|U_i|e^{j\omega t}$. Rãspunsul va fi de forma $U_o(t)=|U_o|e^{j(\omega t+\varphi)}$. Funcția de transfer a circuitului are expresia :

$$K(j\omega)=\frac{U_o}{U_i}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC}=\frac{|U_o|}{|U_i|}\cdot e^{j\varphi}=A(\omega)\cdot e^{j\varphi} \qquad (2.9)$$

unde A(ω) şi φ(ω) reprezintã atenuarea , respectiv defazajul introdus de circuit.