2.2. Circuite RC trece-jos
Schema electricã a unui circuit RC trece-jos este prezentatã în fig.2.12.

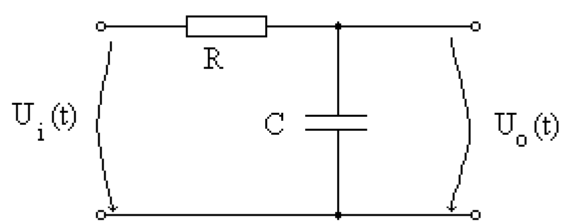

Fig. 2.12. Circuit RC trece-jos

2.2.1. Rãspunsul circuitului RC trece-jos la semnal sinusoidal

Fie semnalul de intrare sinusoidal scris sub formã complexã $U_i(t) = |U_i| e^{j\omega t}$. Rãspunsul va fi de forma $U_o(t) = |U_o| e^{j(\omega t+\varphi)}$. Funcția de transfer a circuitului are expresia :

$$K(j\omega)=\frac{U_o}{U_i}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC}=\frac{|U_o|}{|U_i|}\cdot e^{j\varphi}=A(\omega)\cdot e^{j\varphi} \qquad (2.9)$$

unde $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ reprezintã atenuarea , respectiv defazajul introdus de circuit.

Pe baza relației (2.9) se calculează $A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$ și $\varphi(\omega)=-arctg\ (\omega RC)$

Făcând notația $f_2=\frac{1}{2\pi RC}$ se poate calcula :

$$A(f)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_2}\right)^2}} \quad \text{și} \quad \varphi(f)=-arctg\left(\frac{f}{f_2}\right)$$

Frecvența f_2 poartă numele de frecvență de tăiere . Atenuarea A(f) reprezentată în coordonate logaritmice se prezintă ca în fig.2.13. și justifică denumirea circuitului de filtru trece-jos : pentru frecvențe $f >> f_2$ semnalele sunt puternic atenuate, panta caracteristicii fiind de circa 20 dB/decadă iar pentru frecvențe $f << f_2$ semnalele trec practic neatenuate (atenuare 0 dB)

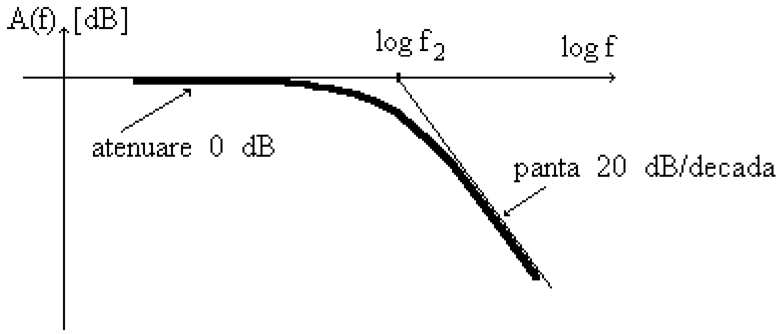

Fig. 2.13. Caracteristica atenuării A(f) în coordonate logaritmice

2.2.2. Răspunsul circuitului RC trece-jos la semnal treaptă

Fie semnalul de intrare un semnal treaptă de amplitudine E aplicat în momentu t = 0 , fig.2.14.a.- linie întreruptă.

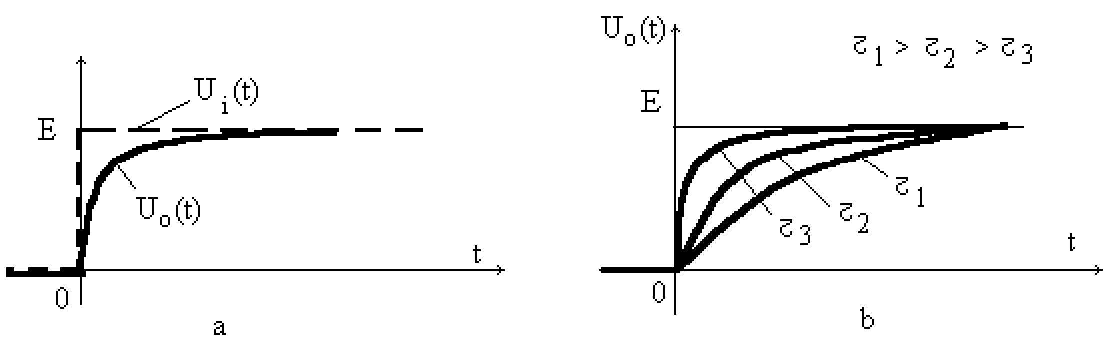

Fig.2.14. Răspunsul circuitului RC trece-jos la semnal treaptă de intrare

Deosebim intervalele :

- intervalul t < 0

Deoarece în tot acest interval $U_i(t) = 0$ rezultă $U_o(t) = 0$. În particular se observă că tensiunea pe condensator în momentul $t = 0^-$ este $U_C(0^-)=0$

- intervalul t > 0

În determinarea rãspunsului pe acest interval vom aplica relația (1.3.). Valorile pentru $U_0(0)$ şi $U_o(\infty)$ se determinã astfel:

- **pentru determinarea valorii $U_o(0)$** se ține cont de faptul cã tensiunea de ieşire coincide cu tensiunea de pe condensator şi aceasta nu se poate modifica prin salt deci are aceeaşi valoare cu cea din momentul $t = 0^-$.adicã $U_C(0^-)=U_C(0^+)=0$.
- **pentru determinarea valorii $U_o(\infty)$** se are în vedere faptul cã la $t = \infty$ curentul prin condensator se anuleazã adicã putem analiza circuitul fãcând abstracție de prezența condensatorului (ca şi cum condensatorul ar lipsi). Rezultã $U_o(\infty) = E$.

În concluzie rãspunsul se va calcula cu

$$\left.\begin{array}{l} U_o(0^+)=0 \\ U_o(\infty)=E \\ \tau = RC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad U_o(t)=U_o(\infty)+\left(U_o(0^+)-U_o(\infty)\right)\cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (2.10)$$

Reunind cele douã rezultate, rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal treaptã este:

$$U_o(t)=\begin{cases} 0 & pentru \quad t<0 \\ E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) & pentru \quad t>0 \end{cases} \qquad (2.11)$$

În figura 2.14.a - linie continuã - s-a reprezentat rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal treaptã iar în fig.2.14.b s-au considerat mai multe valori pentru constanta de timp RC.
Se observã faptul cã rãspunsul circuitului atinge considerabil mai târziu decât semnalul de intrare valoarea de infinit E de unde şi denumirea de circuit de întîrziere care se foloseşte pentru circuitul RC trece-jos (de altfel şi alte valori , de exemplu E/2 sau E/3 , sunt atinse mai târziu de cãtre rãspuns decât de cãtre semnalul de intrare).

Problemã : Sã se calculeze întârzierea cu care rãspunsul atinge valoarea E/2 comparativ cu semnalul treaptã de intrare.

Soluție : Se foloseşte relația (2.10) adicã $U_o(\Delta t)=\frac{E}{2}=E\cdot\left(1-e^{-\frac{\Delta t}{RC}}\right)$ de unde

$\Delta t = RC\ln 2 \approx 0{,}7\cdot RC$

Rãspunsul indicial al circuitului se determinã particularizând (2.10) pentru E = 1 şi este deci

$h(t)=1-e^{-\frac{t}{RC}}$.

2.2.3. Rãspunsul circuitului RC trece-jos la semnal rampã

Fie semnalul de intrare un semnal rampã de pantã k aplicat în momentu t = 0 adicã de forma $U_i(t) = kt$. Pentru $t<0$ avem $U_o(t) = 0$ iar pentru $t>0$ se va aplica integrala Duhamel. În acest scop se calculeazã $U_i(0)=0$ şi $\frac{dU_i(t)}{dt}=k$, de unde :

$$U_o(t)=U_i(0)\cdot h(t)+\int_0^t\left(\frac{dU_i(t)}{dt}\right)_{t=t-\theta}\cdot h(\theta)\cdot d\theta=\int_0^t k\cdot\left(1-e^{-\frac{\theta}{RC}}\right)\cdot d\theta=$$
$$=kt+kRC\cdot\left(e^{-\frac{t}{RC}}-1\right)=k\cdot(t-RC)+kRC\cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{2.12}$$

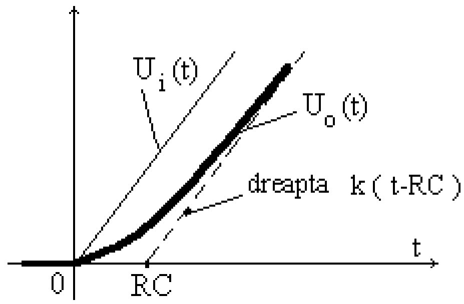

Fig. 2.15. Rãspunsul la semnal rampã

În concluzie :

$$U_o(t)=\begin{cases}0 & pentru \quad t<0\\ k\cdot(t-RC)+kRC\cdot e^{-\frac{t}{RC}} & pentru \quad t>0\end{cases}$$

Semnalul de intrare şi rãspunsul circuitului sunt reprezentate în fig. 2.15. Se poate verifica imediat faptul cã rãspunsul este tangent la abscisã în origine, adicã $\left.\frac{dU_o(t)}{dt}\right|_{t=0}=0$.

Şi în acest caz se poate observa efectul de “întârziere” al rãspunsului faţã de semnalul de la intrare.

2.2.4. Rãspunsul circuitului RC trece-jos la semnal exponenţial

Fie semnalul de intrare un semnal exponenţial de amplitudine E şi constantã de timp τ aplicat în momentu t = 0, adicã de forma $U_i(t)=E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Pentru intervalul t<0 avem $U_o(t) = 0$ iar pentru t>0 se va aplica integrala Duhamel. În acest scop se calculeazã $U_i(0)=0$ şi apoi $\frac{dU_i(t)}{dt}=\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, de unde :

$$U_o(t)=U_i(0)\cdot h(t)+\int_0^t\left(\frac{dU_i(t)}{dt}\right)_{t=t-\theta}\cdot h(\theta)\cdot d\theta=\int_0^t\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t-\theta}{\tau}}\cdot\left(1-e^{-\frac{\theta}{RC}}\right)\cdot d\theta=$$
$$=\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\int_0^t\left[e^{\frac{\theta}{\tau}}-e^{\theta\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{RC}\right)}\right]\cdot d\theta=\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\tau\left(e^{\frac{t}{\tau}}-1\right)-\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\int_0^t e^{\theta\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{RC}\right)}\cdot d\theta= \tag{2.13}$$
$$=E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\int_0^t e^{\theta\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{RC}\right)}\cdot d\theta$$

Discuţie :

Cazul τ = RC În acest caz relaţia de mai sus devine

$$U_o(t)=E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\int_0^t d\theta \;=E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot t \qquad (2.14)$$

Cazul τ ≠ RC În acest caz relația (2.13) devine

$$U_o(t)=E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\int_0^t e^{\theta\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{RC}\right)}\cdot d\theta \;=E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-$$
$$-\frac{E}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{RC}}\cdot\left(e^{t\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{RC}\right)}-1\right)=E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-\frac{E}{1-\frac{\tau}{RC}}\cdot\left(e^{-\frac{t}{RC}}-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (2.15)$$

În cncluzie, rãspunsul complet al circuitului RC trece-jos la semnal exponențial este

$$U_o(t)=\begin{cases}0 & pentru \quad t<0\\ rel.(2.14) \quad sau \quad rel(2.15)) & pentru \quad t>0\end{cases} \qquad (2.16)$$

În fig.2.16 s-au reprezentat semnalul exponențial de intrare cu linie întreruptã şi rãspunsul circuitului (cu linie continuã) pentru mai multe valori ale constantei de timp a circuitului comparativ cu constanta de timp a semnalului.

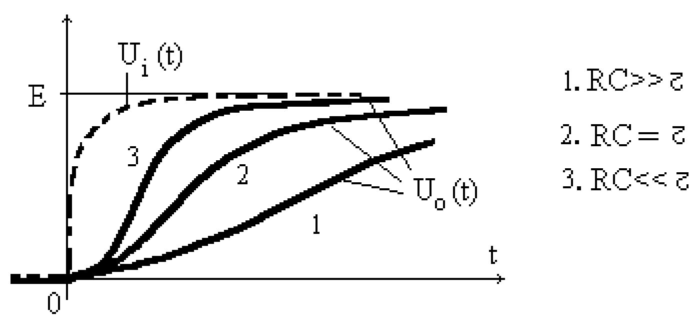

Fig. 2.16. Semnalul exponențial şi rãspunsul circuitului RC trece-sus la acest semnal

Observație : Dacã se considerã RC>>τ atunci în relația (2.15) se pot face neglijarea $\frac{\tau}{RC}$<<1 şi se observã cã relația (2.15) degenereazã în relația (2.10). *Cu alte cuvinte, dacã semnalul exponențial are o constantã de timp foarte micã , atunci el poate fi foarte bine asimilat ca un semnal treaptã de aceeaşi amplitudine* (care este mai simplu de analizat).

2.2.5. Rãspunsul circuitului RC trece-jos la semnal impuls

Fie semnalul de intrare de forma unui impuls de amplitudine E şi duratã t_i aplicat în momentul t = 0 . Rãspunsul circuitului RC trece-jos la acest semnal se poate determina similar cu cel dedus la circuitul RC trecesus adicã se calculeazã rãspunsul pe fiecare interval de timp în parte cu relația (1.3) :

- **intervalul t<0**

Se observã imediat cã pe acest interval $U_o(t) = 0$

- **intervalul 0 < t < t_i**

Se deduc valorile $U_o(0)$ şi $U_o(\infty)$ similar cu cele deduse pentru semnalul treaptã :

$$\left.\begin{array}{c} U_o(0^+) = 0 \\ U_o(\infty) = E \\ \tau = RC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad U_o(t) = U_o(\infty) + \left(U_o(0^+) - U_o(\infty)\right)\cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Pentru momentul $t = t_i^-$ se calculeazã $U_o\left(t_i^-\right) = E\cdot\left(1 - e^{-\frac{t_i}{RC}}\right)$

- **intervalul t > t_i**

Pe acest interval considerãm timpul t' având originea t' = 0 în momentul de început al inervalului. În legãturã cu acest timp putem calcula :

$$\left.\begin{array}{c} U_o(0^+) = E\cdot\left(1 - e^{-\frac{t_i}{RC}}\right) \\ U_o(\infty) = 0 \\ \tau = RC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad U_o(t') = E\cdot\left(1 - e^{-\frac{t_i}{RC}}\right)\cdot e^{-\frac{t'}{RC}}$$

La determinarea valorii $U_o(0^+)$ s-a ținut cont de faptul cã tensiunea pe condensator nu se poate modifica brusc şi deci are aceeaşi valoare cu $U_o(t_i^-)$ calculatã mai sus . De asemenea la t = ∞ curentul prin condensator se anuleazã şi implicit tensiunea de ieşire o egaleazã pe cea de intrare.

Se poate reveni la timpul t fãcând schimbarea de variabilã evidentã $t' = t - t_i$ şi de aici

$$U_o(t) = E\cdot\left(1 - e^{-\frac{t_i}{RC}}\right)\cdot e^{-\frac{t - t_i}{RC}}$$

Reunind toate cele trei intervale, rãspunsul complet devine

$$U_o(t)=\begin{cases} 0 & pentru. \quad t<0 \\ E\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) & pentru. \quad 0<t<t_i \\ E\cdot\left(e^{-\frac{t-t_i}{RC}}-e^{-\frac{t}{RC}}\right) & pentru. \quad t>t_i \end{cases} \qquad (2.17)$$

În fig. 2.17. este figurat semnalul de intrare impuls şi rãspunsul circuitului RC trece-jos.

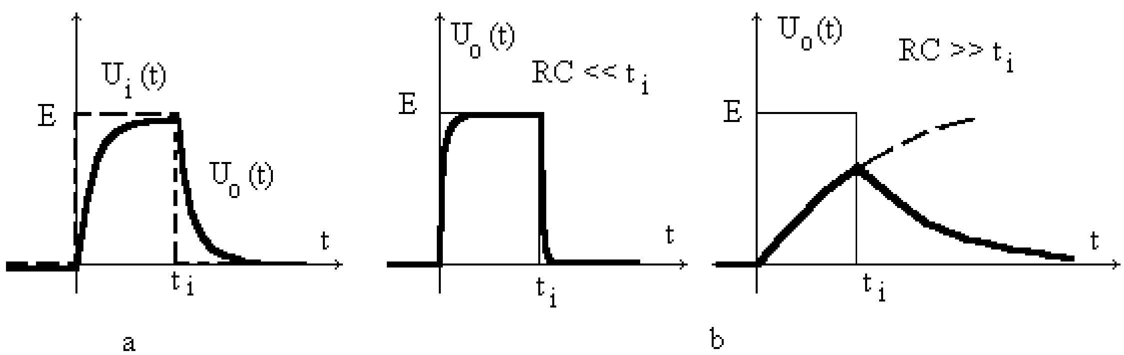

Fig. 2.17 Rãspunsul circuitului RC trece-jos la semnal impuls
a. linie întreruptã semnalul de intrare; linie continuã raspunsul circuitului
b. rãspunsul în douã cazuri particulare : $RC<<t_i$ şi $RC>>t_i$

Se observã faptul cã în cazul $RC<<t_i$ rãspunsul "seamãnã" destul de bine cu semnalul (este de fapt **un impuls exponențial cu o întârziere de cca. $\Delta t = 0,7$ RC** fațã de impulsul de intrare) în timp ce pentru $RC>>t_i$ rãspunsul diferã foarte mult de semnal , fiind puternic atenuat .

2.2.6. Rãspunsul circuitului RC trece-jos la semnal rectangular periodic

Fie un semnal rectangular periodic de amplitudine E , perioadã T şi durate T_1 respectiv T_2 precum cel figurat în fig.2.18. Rãspunsul circuitului în regim permanent periodic este determinat ținând cont de urmãtoarele observații :

- rãspunsul are aceeaşi componentã continuã (valoarea medie) cu semnalul de la intrare
- rãspunsul fiind obținut la bornele unei capacitãți , nu poate avea variații bruşte.
- atât timp cât semnalul de la intrare are valoare constantã , rãspunsul tinde exponențial cãtre aceastã valoare.

La aplicarea primelor impulsuri, se stabileşte un regim tranzitoriu care însã dupã circa (3-5) constante de timp RC atinge practic regimul permanent periodic descris conform principiilor de mai sus. Pentru situațiile particulare privind valoarea constantei de timp , RC, a circuitului, în fig. 2.18. s-au prezentat douã situații limitã :

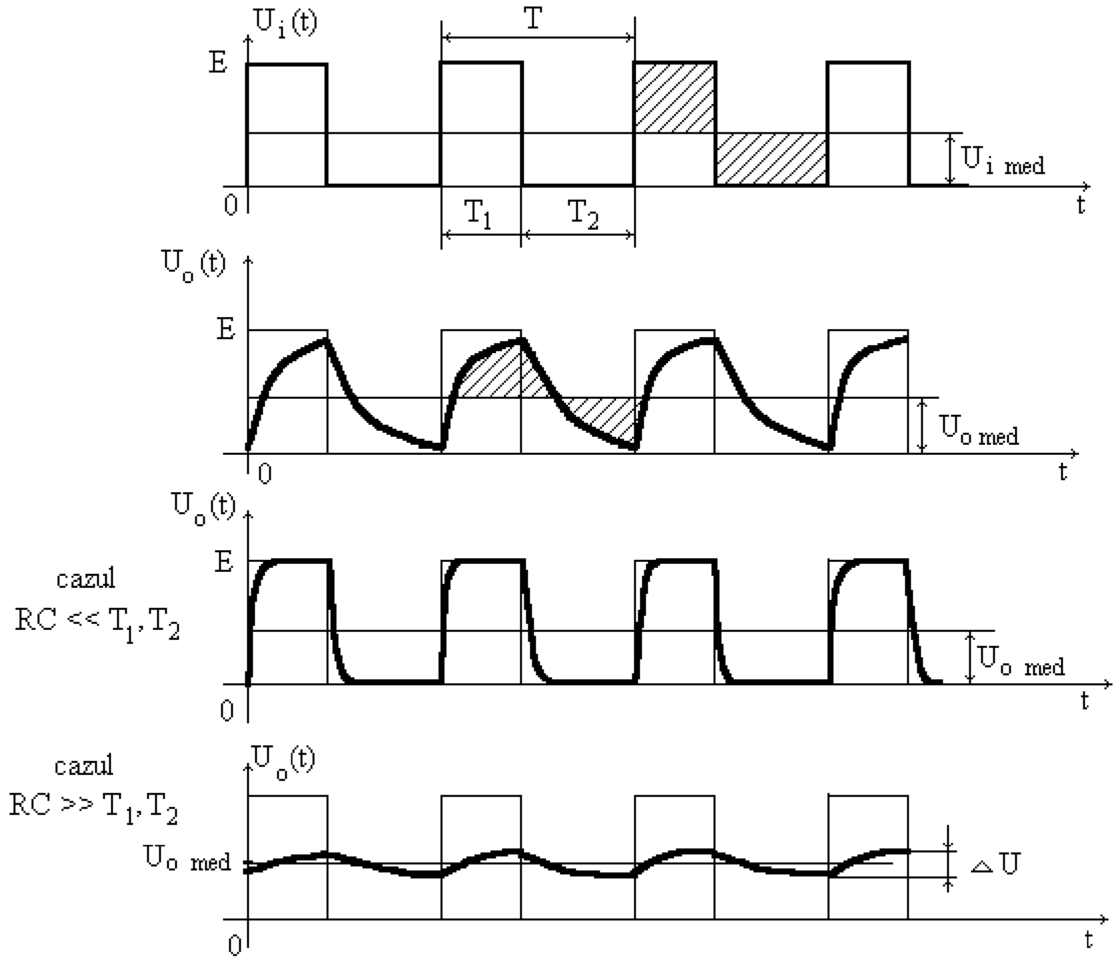

Fig.2.18. Rãspunsul circuitului RC trece-jos la semnal rectangular periodic

-cazul RC << T_1, T_2 : rãspunsul se aseamãnã foarte bine cu semnalul de intrare, excepție fãcând întârzierile aduse de variațiile exponențiale ale fronturilor.

-cazul RC >> T_1, T_2 : în această situație rãspunsul se apropie de valoarea medie având denivelãrile ΔU de o parte şi alta faţã de aceasta. Se poate demonstra cã dacă constanta RC $\rightarrow\infty$ atunci şi denivelãrile $\Delta U \rightarrow 0$. Cu alte cuvinte, în cazul constantelor de timp RC foarte mari, *condensatorul se încarcã la o tensiune practic constantă şi egalã cu componenta medie a semnalului de intrare.*

Pentru determinarea expresiilor analitice care descriu rãspunsul circuitului vezi laborator şi culegerea de probleme.

2.2.7. Circuitul RC trece-jos privit ca circuit de integrare

Sã considerãm un circuit RC trece-jos la intrarea cãruia se aplicã un semnal sinusoidal ca

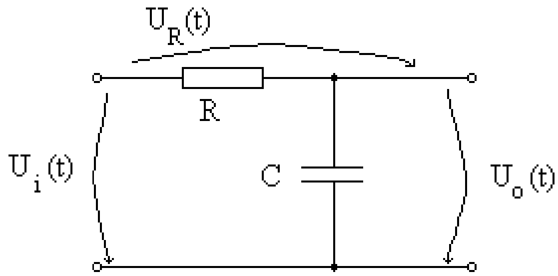

Fig. 2.19.

în fig.2.19. În condițiile în care $R >> \frac{1}{\omega C}$ atunci $U_R >> U_C$ şi se poate scrie cã $U_i(t) = U_c(t) + U_R(t) \approx U_R(t)$

Dar cele douã elemente fiind înseriate înseamnã cã sunt parcurse de acelaşi curent $i_C(t) = i_R(t)$ de unde rezultă urmãtoarea relație

$$U_o(t) = \frac{1}{C}\int i_c(t)\cdot dt = \frac{1}{C}\int \frac{U_R(t)}{R}\cdot dt \approx \frac{1}{RC}\int U_i(t)\cdot dt \ :$$

Cu alte cuvinte , în condițiile $R >> \frac{1}{\omega C}$ tensiunea de ieşire este proporționalã cu integrala tensiunii de intrare. Revãzând rãspunsul circuitului RC trece-sus la semnal sinusoidal se constatã cã defazajul între semnalul de intrare şi cel de ieşire este $\varphi(\omega) = -arctg\ (\omega RC)$. O integrare corectã ar presupune φ = -90^{o} adicã $\omega RC \to \infty$. Practic se constatã cã pentru $\omega RC 1 = 10$ se obține un defazaj φ ≈ - 84^{o} ceea ce poate fi acceptabil în unele cazuri.

În cazul unui semnal de intrare periodic, oarecare, este necesar ca componenta de frecvență minimã din spectrul semnalului sã îndeplinească condiția $R >> \frac{1}{\omega_{\min} C}$ şi atunci rãspunsul este practic proporțional cu integrala semnalului de intrare.